

Тема 10 Сложное нагружение

К сложному сопротивлению относятся виды деформаций бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает более одного внутреннего силового фактора. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях и возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Этот вид деформации рассматривается как простой потому, что в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

При сложном нагружении необходимо научиться определять внутренние усилия, напряжения в любой произвольной точке, находить опасные сечения и самые опасные точки, чтобы потом сделать выводы о прочности элемента конструкции. Кроме того, необходимо уметь определять и деформации, чтобы рассчитать элемент конструкции на жесткость.

Общий случай действия сил на брус и разложение на частные случаи

При самом сложном нагружении прямого бруса (рис.10.1) в его поперечном сечении возникают 6 внутренних факторов: изгибающие моменты M_z , M_y , крутящий момент T_x , продольная сила N_x и поперечные силы Q_y и Q_z .

Внутренние силовые факторы в произвольных сечениях определяются с использованием метода сечений.

Внутренние силовые факторы в произвольном сечении, расположенном на расстоянии x от левого конца бруса, изображенного на рис.10.1, a можно определить через внешние нагрузки, расположенные слева от этого сечения.

В сечении внутренние силовые факторы изображены положительными. Для определения продольной и поперечной силы необходимо спроектировать внешние нагрузки на направления N_x , Q_y , Q_z .

$$N_x = F_1 + F_4;$$

$$Q_y = F_2 - F_2 - F_3 - q(x - a) = -F_3 - q(x - a);$$

$$Q_z = -F_5.$$

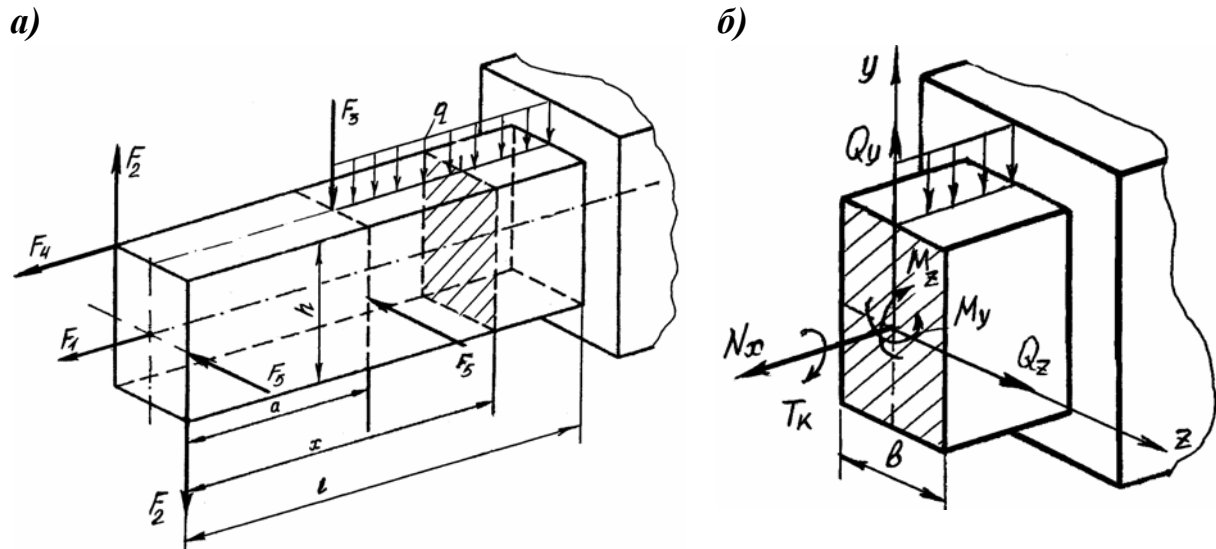


Рис. 10.1

Для определения крутящего и изгибающего моментов определяют величину моментов всех внешних сил, расположенных слева от сечения, относительно главных центральных и продольных осей.

Знак момента внешней силы определяется положительным направлением M_z , M_y , T_x .

$$M_z = (F_1 - F_2) \cdot (x - a) - F_4 \cdot \frac{h}{2} - F_3(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2} =$$

$$= -\frac{F_4 h}{2} - F_3(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2};$$

$$M_y = F_4 \frac{b}{2} - F_5 \cdot x;$$

$$T_x = F_2 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{2} = F_2 \cdot b.$$

Для линейно-деформируемых систем, которые мы рассматриваем в курсе «Сопротивление материалов», можно применять принцип суперпозиции, и любое сложное нагружение бруса можно заменить суммой простых нагружений или некоторым их сочетанием. Часто эти сочетания могут встречаться самостоятельно. Они будут рассмотрены ниже.

Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса

не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения. Элемент бруса, примыкающий к этому сечению, находится в условиях косоугольного изгиба.

Случай косоугольного изгиба, при котором в поперечном сечении бруса возникает лишь изгибающий момент, называется *чистым косоугольным изгибом*. Если же в сечении действует, кроме того, поперечная сила, то имеется *поперечный косоугольный изгиб*.

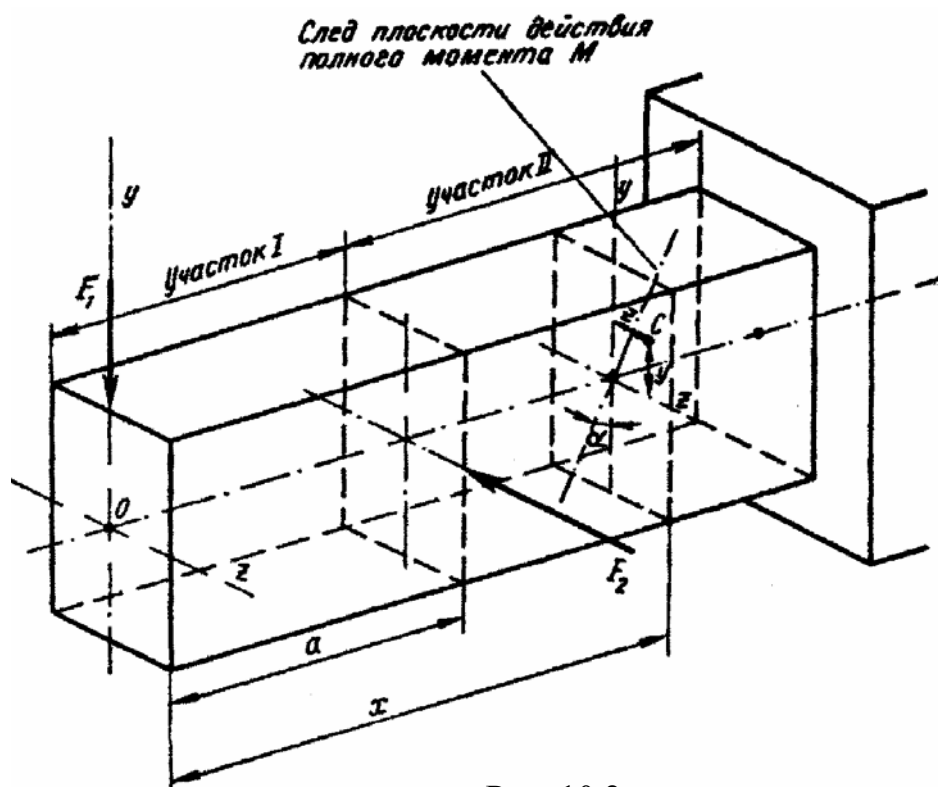


Рис. 10.2

На рис. 10.2 изображен брус с прямоугольным поперечным сечением, заделанный правым концом. К брусу на свободном конце приложена вертикальная сила F_1 , а в сечении на расстоянии a от свободного конца – горизонтальная сила F_2 .

В каждом поперечном сечении участка I возникают изгибающий момент M_z , действующий в плоскости yx , и поперечная сила $Q_y = -F_1$; этот участок испытывает прямой поперечный изгиб. В поперечном сечении участка II бруса с абсциссой x действуют изгибающий момент $M_z = -F_1x$ в главной плоскости yx , изгибающий момент $M_y = -F_2(x - a)$ в главной плоскости zx и поперечные силы $Q_y = -F_1$ и $Q_z = -F_2$. Полный изгибающий момент $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ действует в плоскости, не совпадающей ни с

одной из главных плоскостей бруса. Следовательно, на участке II возникает поперечный кривой изгиб.

Таким образом, *кривой изгиб можно рассматривать, как сочетание двух прямых изгибов*, вызванных изгибающими моментами относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения y и z .

На основании принципа независимости действия сил полные нормальные напряжения в поперечных сечениях участка II равны сумме напряжений от раздельного действия моментов M_z и M_y . Следовательно, в точке C поперечного сечения (рис.10.2) полное напряжение

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.1)$$

Если в формуле (10.1) брать абсолютные значения изгибающих моментов, то формулу можно переписать в виде

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{J_z} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.2)$$

Перед первым членом правой части берется знак плюс, когда момент M_z вызывает растяжение в точках сечения с положительными координатами y , а перед вторым членом – когда момент M_y вызывает растяжение в точках с положительными координатами z .

На рис. 10.3 показаны эпюры нормальных напряжений σ_{M_z} и σ_{M_y} в поперечном сечении участка II бруса (рис.10.2) от раздельного действия изгибающих моментов M_z и M_y .

Полный изгибающий момент M связан с его составляющими M_z и M_y зависимостями

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}; \quad (10.3)$$

$$|M_z| = M \cos \alpha; |M_y| = M \sin \alpha, \quad (10.4)$$

где α – угол между осью y и плоскостью действия полного момента (рис.10.3).

Из выражений(10.4)найдем

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right|. \quad (10.5)$$

Положение плоскости действия полного момента устанавливается с учетом того обстоятельства, что эта плоскость проходит через центр тяже-

сти сечения и два квадранта, в которых оба момента M_z и M_y вызывают нормальные напряжения одного знака (в нашем примере I и III квадранта).

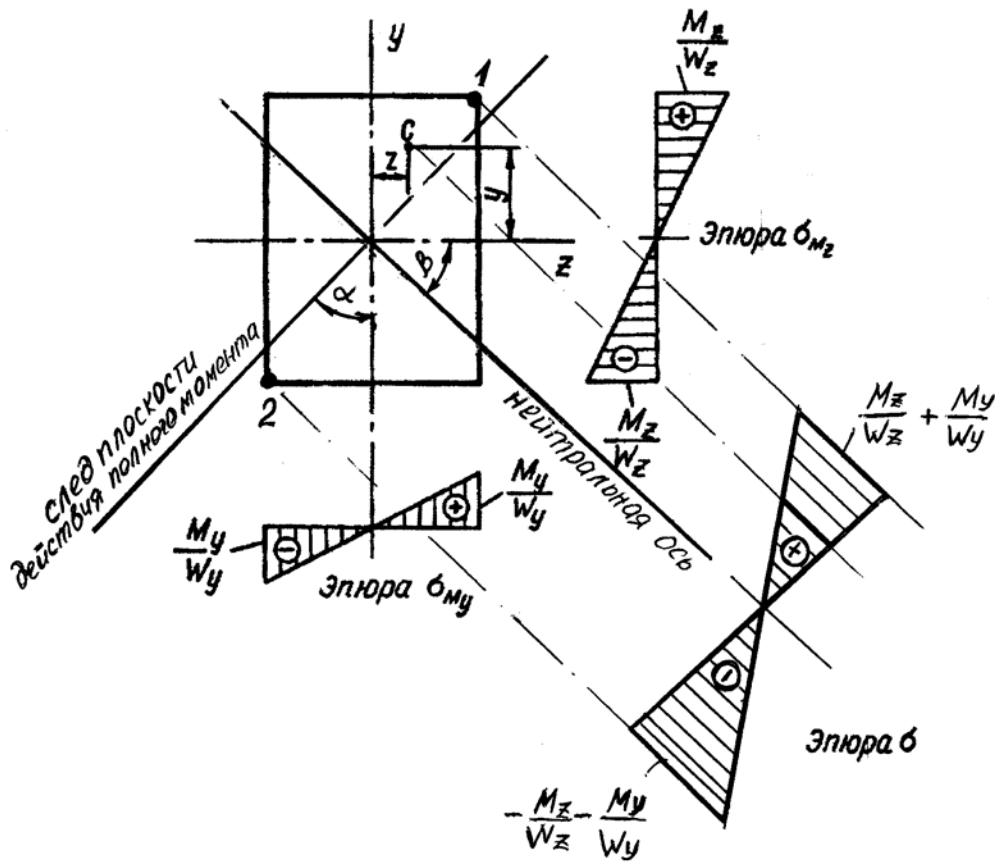


Рис.10.3

Для сечений, имеющих две оси симметрии и угловые точки, всегда находится угловая точка, где напряжения складываются

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (10.6)$$

Для произвольных сечений необходимо найти положение нейтральной оси в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения бруса. Уравнение нейтральной оси легко получить, приравняв напряжения в произвольной точке при косом изгибе к нулю.

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot z = 0.$$

Решим это уравнение относительно y и получим

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y} \cdot z. \quad (10.7)$$

В выражении (10.7) $-\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}$ представляет угловой коэффициент наклона нейтральной оси к оси z , и он равен тангенсу угла наклона нейтральной оси относительно оси z , т.е.

$$|\operatorname{tg}\beta| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right| \cdot \frac{J_z}{J_y}, \text{ но } \left| \frac{M_y}{M_z} \right| = |\operatorname{tg}\alpha| \text{ и тогда}$$

$$|\operatorname{tg}\beta| = |\operatorname{tg}\alpha| \cdot \frac{J_z}{J_y}. \quad (10.8)$$

Угол β – угол наклона нейтральной оси к оси z .

Нейтральная ось никогда не проходит через квадранты, которые пересекают след плоскости действия полного момента M .

Наиболее опасными точками при косом изгибе будут точки наиболее удаленные от нейтральной оси. Для этого необходимо провести линии параллельно нейтральной оси, касающиеся контура сечения.

Расчеты на прочность при косом изгибе

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и сечением, имеющим две оси симметрии с угловыми точками, условие прочности по допускаемым напряжениям примет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (10.9)$$

При расчете по предельным состояниям

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq m_u R_u, \quad (10.10)$$

где M_z, M_y – составляющие расчетного, т.е. определенного по расчетным нагрузкам, момента относительно осей z и y ;

W_z, W_y – моменты сопротивления сечения относительно осей z и y ;

m_u – коэффициент условий работы элемента на косой изгиб, при обычных условиях работы близок к единице;

R_u – расчетное сопротивление материала изгибу.

Для материалов, различно работающих на растяжение и сжатие, и сечением произвольной формы, условие прочности на косоу изгиб при расчете по допускаемым напряжениям будет иметь вид

$$\max \sigma_{\rho} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^{\rho} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max}^{\rho} \leq [\sigma_{\rho}]; \quad (10.11)$$

$$|\max \sigma_c| = \left| \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^c + \frac{M_y}{J_y} z_{\max}^c \right| \leq [\sigma_c]. \quad (10.12)$$

В формулах(10.9,10.11,10.12) M_z и M_y – изгибающие моменты относительно главных центральных осей, полученные при расчете на нормативную нагрузку, а y_{\max}^{ρ} , y_{\max}^c и z_{\max}^{ρ} , z_{\max}^c – координаты опасных (наиболее удаленных от нейтральной оси) точек в растянутой и сжатой зонах в системе главных центральных осей поперечного сечения бруса.

При расчете на прочность по предельным состояниям получаем аналогичные по форме формулы, только вместо допускаемых напряжений – расчетные сопротивления на растяжение R_t и на сжатие R_c .

Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением или *сжатием* называется такой вид деформации, когда в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная сила и изгибающий момент.

Вызывается действием нагрузки, параллельной оси бруса, но не совпадающей с осью бруса.

Будем рассматривать жесткие брусья, в которых можно не учитывать дополнительные изгибающие моменты за счет изгиба бруса.

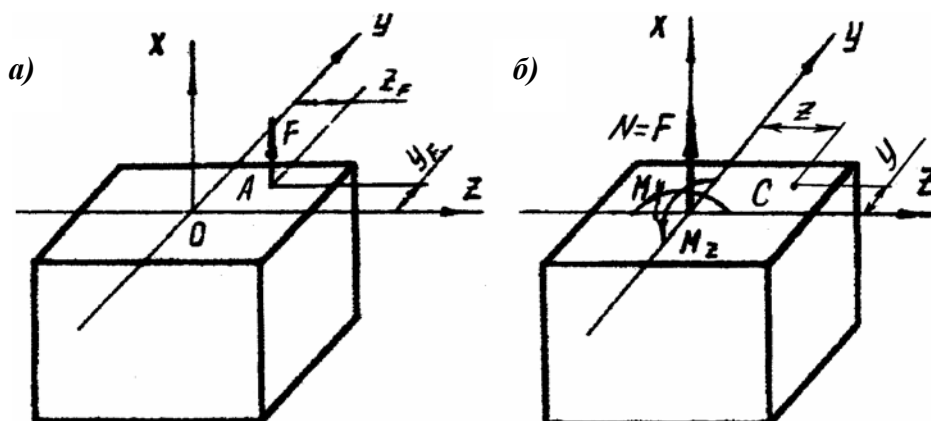


Рис. 10.4

Пусть на жесткий брус действует растягивающая сила F , приложенная в точке A с координатами z_F и y_F , которые называют эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции z и y (рис.10.4, а).

Приведем силу F к центру тяжести сечения (рис.10.4, б). Она приводится к продольной силе $N = F$ и двум изгибающим моментам M_z и M_y .

Тогда напряжение в произвольной точке C с координатами z и y равно сумме напряжений от продольной силы N и изгибающих моментов M_z и M_y , т.е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.13)$$

Подставим в формулу (10.13) выражения $M_z = F \cdot y_F$ и $M_y = F \cdot z_F$, получим

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F}{J_z} \cdot y + \frac{F \cdot z_F}{J_y} \cdot z. \quad (10.14)$$

В формуле (10.14) растягивающая сила F подставляется со знаком плюс, а сжимающая – со знаком минус; координаты y_p, z_p, y и z в эту формулу подставляются со своими знаками.

Формулу (10.14) можно представить в следующем виде:

$$\sigma = F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{J_z} + \frac{z_F \cdot z}{J_y} \right) \quad (10.15)$$

или

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right), \quad (10.16)$$

где $i_z = \sqrt{J_z/A}$ и $i_y = \sqrt{J_y/A}$ – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции.

Уравнение нейтральной оси можно получить из формулы (10.16), приравняв $\sigma = 0$. Так как $\frac{F}{A} \neq 0$, то

$$1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} = 0. \quad (10.17)$$

Выражение (10.17) является уравнением прямой линии и представляет собой уравнение нейтральной оси. Определим отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях инерции поперечного сечения.

Пусть $z = 0$, тогда из выражения (10.17) отрезок, отсекаемый нейтральной осью на главной центральной оси y ,

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_F}. \quad (10.18)$$

Пусть $y = 0$, тогда из выражения (10.17) отрезок, отсекаемый нейтральной осью на главной центральной оси z ,

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (10.19)$$

Из выражений (10.18, 10.19) следует:

- положение нейтральной оси не зависит от величины и знака силы F ;
- нейтральная ось и полюс (точка приложения силы F) лежат по разные стороны от начала координат;
- чем дальше от начала координат расположен полюс, тем ближе к центру сечения проходит нейтральная ось;
- если полюс расположен на одной из главных центральных осей инерции, то нулевая линия перпендикулярна этой оси.

При внецентренном растяжении и сжатии нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения бруса, как и при изгибе, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нейтральной оси.

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Расчеты на прочность при внецентренном растяжении и сжатии

При внецентренном растяжении и сжатии расчет на прочность производится обычно по нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях бруса, т.е. как при одноосном напряженном состоянии. Поэтому теория прочности при таком расчете не используется.

Условие прочности по допускаемым напряжениям при внецентренном растяжении (сжатии) для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие имеет вид

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma], \quad (10.20)$$

где y_{\max} , z_{\max} – координаты наиболее удаленной от нейтральной оси точки поперечного сечения.

Для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, условия прочности запишутся так:

$$\max \sigma_p = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}^p}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}^p}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p]; \quad (10.21)$$

$$|\max \sigma_c| = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}^c}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}^c}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma_c], \quad (10.22)$$

где y_{\max}^p, y_{\max}^c и z_{\max}^p, z_{\max}^c – координаты точек, наиболее удаленных от нейтральной оси, в растянутой и сжатой зонах поперечного сечения бруса.

При расчете по предельным состояниям структура формул (10.20), (10.21, 10.22) остается такой же, только F – расчетная нагрузка, а вместо $[\sigma], [\sigma_p], [\sigma_c]$ подставляются расчетные сопротивления R, R_t и R_c .

Некоторые материалы (бетон, кирпичная кладка) могут воспринимать лишь весьма незначительные растягивающие напряжения, а другие (например грунт) не могут вовсе сопротивляться растяжению. Такие материалы используются для изготовления лишь элементов конструкций, в которых не возникают растягивающие напряжения. Поэтому они не применяются для изготовления элементов конструкций, испытывающих изгиб, кручение, центральное и внецентренное растяжение.

Из таких материалов могут изготавливаться и внецентренно-сжатые элементы, если в них не возникают растягивающие напряжения. Это происходит в том случае, когда точка приложения сжимающей силы расположена внутри некоторой центральной области поперечного сечения, называемой ядром, или на границе этой области.

Ядром сечения называется его некоторая центральная область, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой ее точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса сжимающие напряжения, т.е. напряжения одного знака.

Существуют два основных метода построения ядра сечения: метод полюсов, метод касательных.

Рассмотрим определение ядра сечения прямоугольной формы методом касательных (рис.10.5).

Положение главных центральных осей для данного сечения известно. Ими являются оси симметрии сечения z, y .

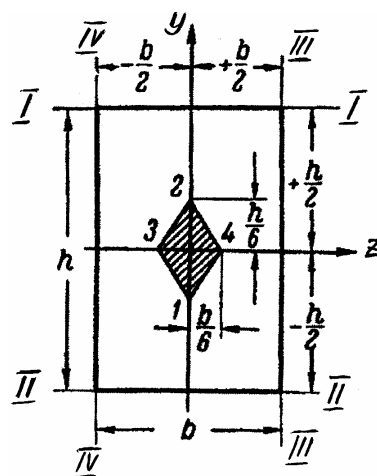


Рис. 10.5

1. Задаемся положением нейтральной оси (касательной к контуру сечения) I-I.

Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях равны

$$z_n = \infty; \quad y_n = \frac{h}{2}$$

Тогда из формул (10.18, 10.19) найдем координаты приложения нагрузки, соответствующие нейтральной оси I-I,

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n}, \text{ но } i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12},$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}.$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Нейтральной оси I-I соответствует полюс 1 $\left(0; -\frac{h}{6}\right)$.

2. Задаемся положением нейтральной оси II-II. Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях

$$z_n = \infty; \quad y_n = -\frac{h}{2}.$$

Координаты приложения нагрузки

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Координаты полюса 2 $\left(0; \frac{h}{6}\right)$.

3. Задаемся положением нейтральной оси III-III.

Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях инерции,

$$z_n = \frac{b}{2}, \quad y_n = \infty.$$

Координаты приложения нагрузки

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot 6} = -\frac{b}{6}; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0.$$

Координаты полюса 3 $\left(-\frac{b}{6}; 0\right)$.

4. Задаемся положением нейтральной оси IV-IV.

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях инерции

$$z_n = -\frac{b}{2}, \quad y_n = \infty, \text{ тогда}$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = \frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{b}{6}; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0.$$

Координаты полюса 4 $\left(\frac{b}{6}; 0\right)$.

Соединив полюса 1, 2, 3, 4, получим ядро сечения (рис.10.5).

Изгиб с растяжением

Пусть брус прямоугольного поперечного сечения нагружен силой F , вызывающей осевое растяжение, а также силами F_1 и F_2 , вызывающими изгиб в двух плоскостях (рис.10.6).

Для определения опасного сечения построим эпюры N , M_z и M_y , используя метод сечений

$$N = F; \quad M_z = -F_1 x; \quad \text{и} \quad M_y = -F_2 x.$$

При $x = 0$ $M_z = M_y = 0$, а при $x = l$ $M_z = -F_1 l$; $M_y = -F_2 l$.

Опасным является сечение B , для которого построены эпюры нормальных напряжений от растяжения и изгиба в двух плоскостях (рис.10.6, ∂).

Для произвольной точки C с координатами z и y нормальное напряжение равно

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.23)$$

Уравнение нейтральной оси можно получить, приравняв $\sigma = 0$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z = 0. \quad (10.24)$$

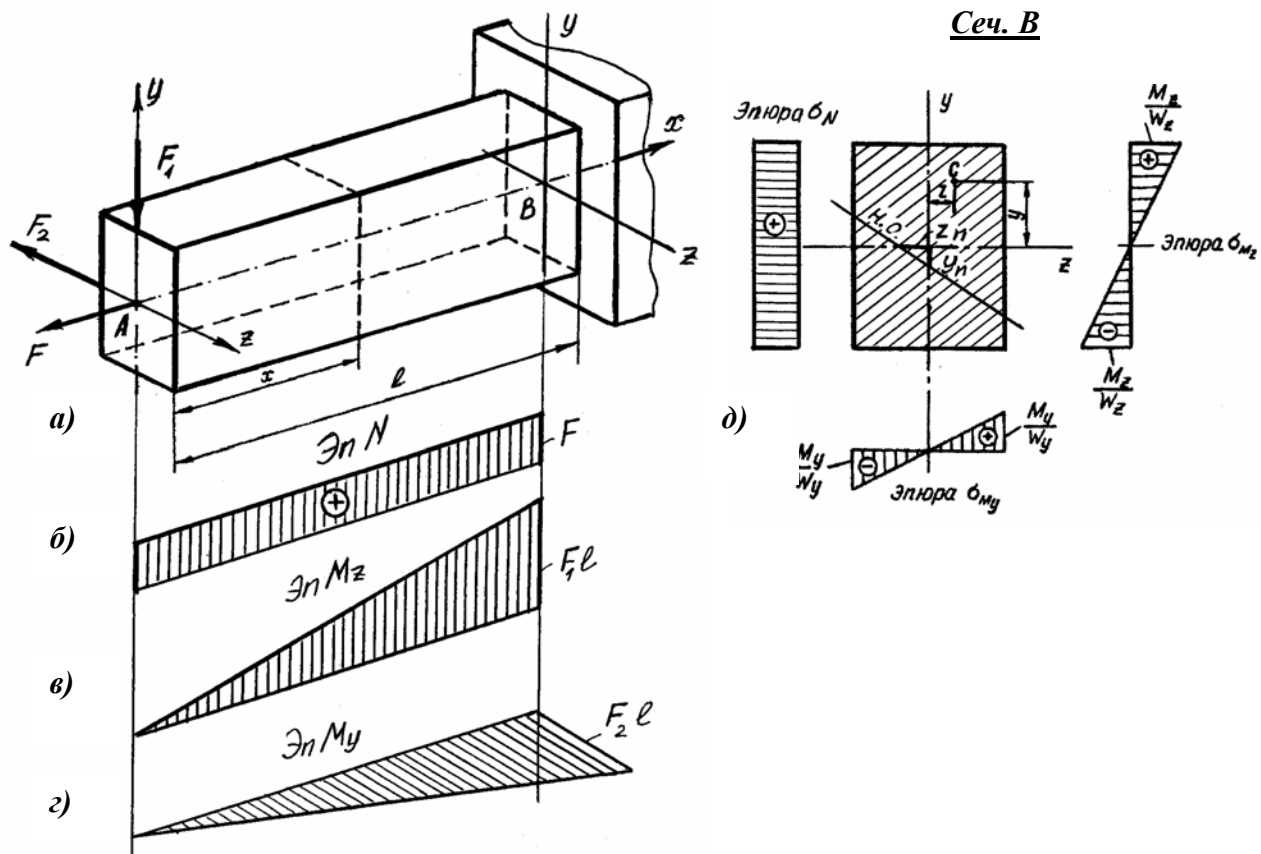


Рис. 10.6

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях, будут равны:

$$y = 0, \quad z_n = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y}; \quad (10.25)$$

$$z = 0, \quad y_n = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_z}{M_z}$$

Нейтральная ось уходит в противоположный квадрант по отношению к квадранту, где нормальные напряжения σ_N , σ_{M_z} , σ_{M_y} одного знака.

Для сечений с двумя осями симметрии и угловыми точками всегда найдется угловая точка, в которой напряжения от N , M_z и M_y суммируются. Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то условие прочности при расчете по допускаемым напряжениям примет вид

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{N}{A} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (10.26)$$

Для произвольных сечений опасные точки определяются после определения положения нейтральной оси. Ими будут точки, расположенные на наибольшем удалении от нейтральной оси.

Если материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности по допускаемым напряжениям получается из условия

$$\max \sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad |\max \sigma_{сж}| \leq [\sigma_c].$$

Изгиб с кручением

С сочетанием изгиба и кручения брусьев круглого поперечного сечения наиболее часто приходится встречаться при расчете валов. Значительно реже встречаются случаи изгиба с кручением брусьев некруглого сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных центральных осей равны между собой, кривой изгиб брусьев круглого поперечного сечения невозможен. Поэтому в общем случае действия внешних сил брус круглого сечения испытывает сочетание следующих видов деформаций: прямого поперечного изгиба, кручения и центрального растяжения (или сжатия).

Рассмотрим такой частный случай расчета бруса круглого сечения, когда в его поперечных сечениях продольная сила равна нулю. В этом случае брус работает на совместное действие изгиба и кручения. Для отыскания опасной точки бруса необходимо установить, как изменяются по длине бруса изгибающие и крутящие моменты, т.е. построить эпюры полных изгибающих моментов M и крутящих моментов T_k . Построение этих эпюр рассмотрим на конкретном примере вала (рис.10.7). Вал опирается на подшипники A и B и приводится во вращение двигателем C .

На вал насажены шкивы с диаметрами $D_1 = 0,4$ м и $D_2 = 0,6$ м, через которые перекинута приводные ремни, имеющие натяжения T_1 и t_1 , T_2 и t_2 . Число оборотов вала $n = 980$ об/мин, суммарная передаваемая мощность $N = 15$ кВт, причем со шкива, диаметром D_1 снимается мощность $N_1 = 9$ кВт, а со шкива диаметром D_2 – 6кВт. Углы наклона ветвей $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$.

Предположим, что вал вращается в подшипниках без трения; собственной массой вала и шкивов пренебрегаем. Для ременной передачи принимаем $T_1 = 2t_1$ и $T_2 = 2t_2$.

К валу в сечениях, в которых расположены шкивы 1 и 2, прикладываются скручивающие моменты m_1 и m_2 , которые определяются по формулам

$$m_1 = 9550 \frac{N_1}{n} = 9550 \frac{9}{980} = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$m_2 = 9550 \frac{N_2}{n} = 9550 \frac{6}{980} = 58,47 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Окружные силы можно определить, зная скручивающие моменты из условия

$$m_1 = T_1 \cdot \frac{D_1}{2} - t_1 \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{(2t_1 - T_1) \cdot D_1}{2};$$

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 87,7}{0,4} = 438,5 \text{ Н}.$$

Аналогично

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 58,47}{0,6} = 194,9 \text{ Н}.$$

Теперь можно определить силы давления на вал. Каждая равна трем окружным усилиям:

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 438,5 = 1315,5 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 194,9 = 584,7 \text{ Н}.$$

Разложим силы давления на вал F_1 и F_2 на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 1315,5 \cdot 0,5 = 657,8 \text{ Н}; \quad F_{1z} = F_1 \cos 30^\circ = 1315,5 \cdot 0,866 = 1139,2 \text{ Н}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ = 584,7 \cdot 0,707 = 413,4 \text{ Н}; \quad F_{2z} = F_2 \cos 45^\circ = 584,7 \cdot 0,707 = 413,4 \text{ Н}.$$

Момент, передаваемый от электродвигателя на вал,

$$m = 9550 \frac{N}{n} = 9550 \frac{15}{980} = 146,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Используя метод сечений, определим величину крутящих моментов по участкам вала и построим эпюру крутящих моментов.

$$T_{1к} = 0; \quad T_{2к} = m_1 = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_{3к} = m = 146,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

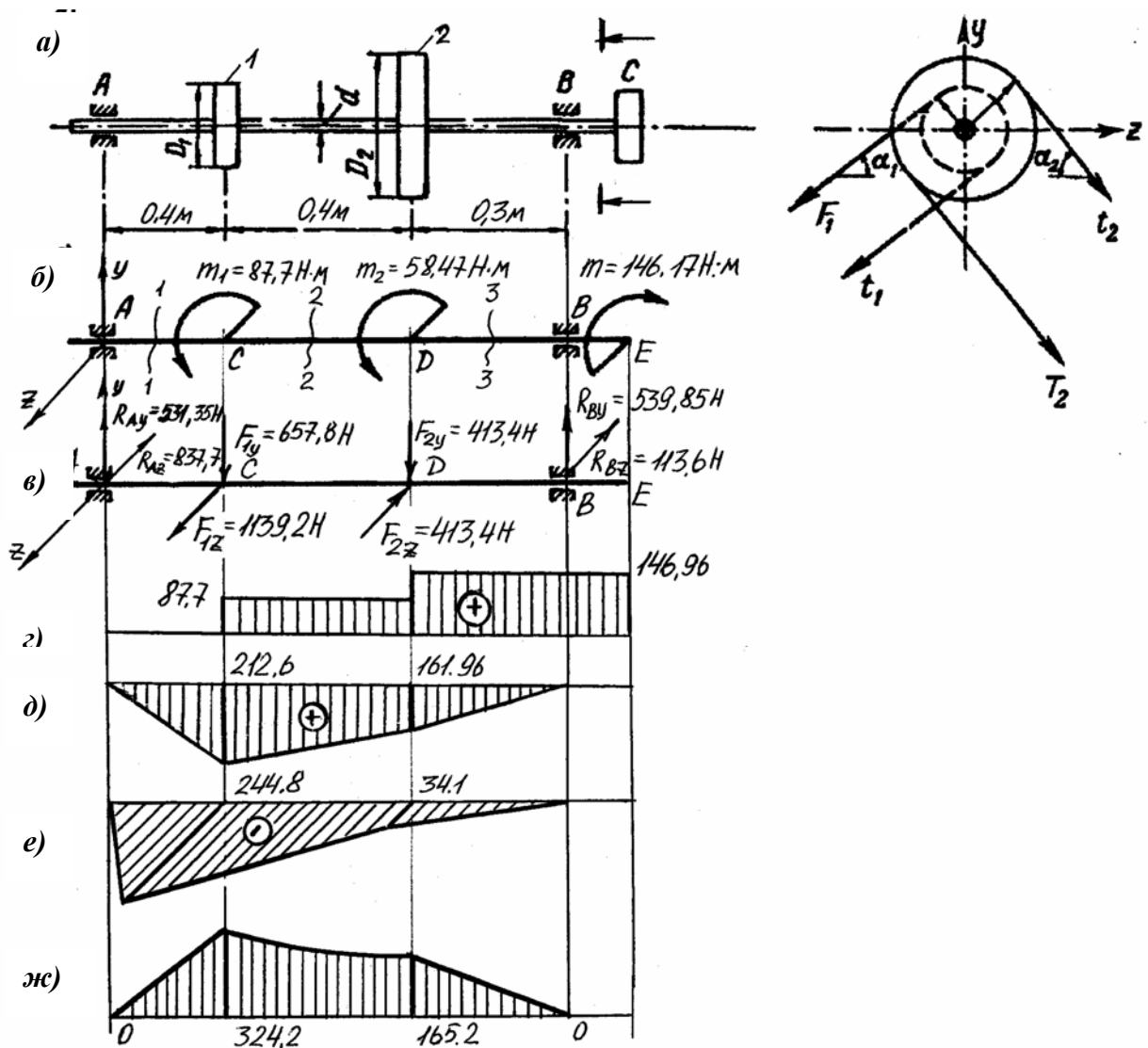


Рис. 10.7

Определим величину опорных реакций от действия вертикальной и горизонтальной нагрузок:

– от вертикальной нагрузки

$$\sum M_A = 0. \quad 675,8 \cdot 0,4 + 413,4 \cdot 0,8 - 1,1R_{By} = 0; \quad R_{By} = 539,85 \text{ H};$$

$$\sum M_B = 0. \quad -413,4 \cdot 0,3 - 675,8 \cdot 0,7 + 1,1R_{Ay} = 0; \quad R_{Ay} = 531,35 \text{ H}.$$

Проверка: $\sum y = 531,35 + 539,85 - 675,8 - 413,4 = 1071,2 - 1071,2 = 0.$

– от горизонтальной нагрузки

$$\sum M_A = 0. \quad 1139,2 \cdot 0,4 - 413,4 \cdot 0,8 - 1,1R_{Bz} = 0; \quad R_{Bz} = 113,6 \text{ H};$$

$$\sum M_B = 0. \quad 413,4 \cdot 0,3 - 1139,2 \cdot 0,7 + 1,1R_{Az} = 0; \quad R_{Az} = 612,2 \text{ H}.$$

Проверка: $\sum z = -612,2 - 113,6 + 1139,2 - 413,4 = -725,8 + 725,8 = 0$

Определим величину изгибающих моментов в характерных сечениях вала от вертикальной и горизонтальной нагрузок и построим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (рис.10.7, *д*, *е*).

– от вертикальной нагрузки

$$M_{Az} = 0; M_{Bz} = 0; M_{Cz} = 531,5 \cdot 0,4 = 212,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Dz} = 539,85 \cdot 0,3 = 161,96 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

– от горизонтальной нагрузки

$$M_{Ay} = 0; M_{By} = 0; M_{Cy} = -612,2 \cdot 0,4 = 244,8 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Dy} = -113,6 \cdot 0,3 = -34,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

По эпюрам M_z и M_y можно определить в любом поперечном сечении круглого вала полный изгибающий момент M по формуле

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (10.27)$$

Для каждого сечения плоскость действия изгибающего момента своя, но для вала круглого поперечного сечения суммарную эпюру изгибающих моментов можно совместить в одной плоскости (рис.10.7, *ж*). На тех участках вала, на которых прямые, ограничивающие эпюры M_z и M_y , пересекают оси эпюр в точках, расположенных на одной вертикали, эпюра M ограничена прямыми, а на остальных участках – кривыми.

$$M_A = 0, \quad M_C = \sqrt{212,6^2 + 244,8^2} = 324,2 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_D = \sqrt{161,96^2 + 34,1^2} = 165,5 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_B = 0.$$

Опасное сечение вала устанавливается с помощью эпюр полных изгибающих моментов M и крутящих моментов T_k .

В нашем примере таким сечением является сечение C , где $T_k = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $M = 324,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. А теперь определим опасные точки поперечного сечения. Для этого рассмотрим напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса, когда в нем одновременно действуют изгибающий момент M и крутящий момент T_k .

В брусках круглого сечения, длина которых во много раз больше диаметра, наибольшие касательные напряжения от поперечной силы невелики и при расчете прочности брусков на совместное действие изгиба и кручения не учитываются.

На рис.10.8, а показана эпюра нормальных напряжений от полного изгибающего момента.

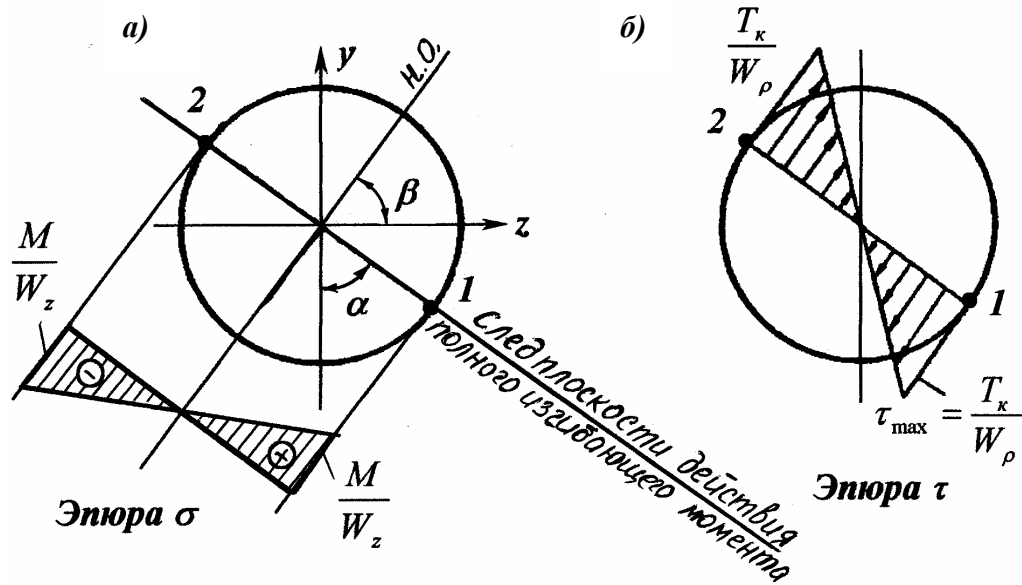


Рис. 10.8

Плоскость действия суммарного изгибающего момента определяется углом α к оси y , определяемого по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z} = \frac{244,8}{212,6} = 1,1515; \quad \alpha = 49^\circ.$$

Нейтральная ось перпендикулярна следу плоскости действия полного изгибающего момента $\beta = \alpha = 49^\circ$.

Опасными точками являются точки 1 и 2. В точке 1 будут наибольшие растягивающие напряжения

$$\sigma_{(1)} = \frac{M}{W_z},$$

а в точке 2 – наибольшие сжимающие напряжения

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M}{W_z}.$$

Эпюра касательных напряжений изображена на рис.10.8, б. Касательные напряжения τ определяются по формуле

$$\tau = \frac{T_k}{J_\rho} \cdot \rho.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, расположенных по периметру сечения. Они равны

$$\tau = \frac{T_{\kappa}}{W_{\rho}} = \frac{T_{\kappa}}{2W_z}, \quad (10.28)$$

где $W_{\rho} = 2W_z$ – полярный момент сопротивления, равный двум осевым моментам сопротивления поперечного сечения бруса.

При пластичном материале точки 1 и 2 поперечного сечения, в которых одновременно и нормальные, и касательные напряжения достигают наибольшего значения, являются равноопасными. При хрупком материале опасной является та из точек, в которой от изгибающего момента M возникают растягивающие напряжения.

Напряженное состояние элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки 1, считая совпадающими плоскость действия полного изгибающего момента M с главной плоскостью uox , изображено на рис.10.9, а.

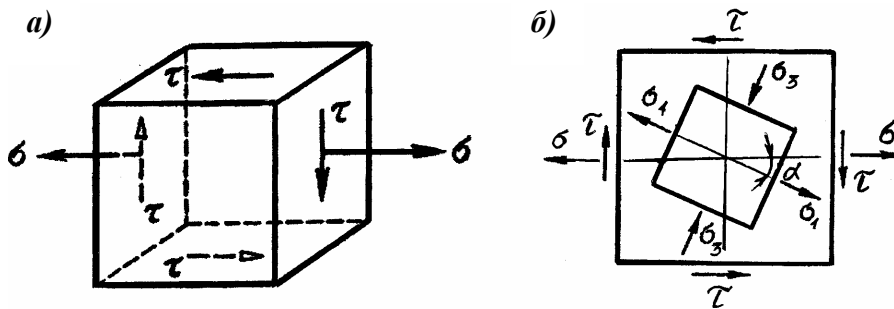


Рис. 10.9

Таким образом, в данном случае в рассматриваемой точке создается плоское напряженное состояние (рис.10.9, б), где $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$. $\tau_y = \tau$.

Положение главных площадок определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma_x},$$

угол α в нашем случае отрицателен, и главные площадки будут повернуты по часовой стрелке.

Главные напряжения σ_1 и σ_3 определяются по формуле

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_y^2}.$$

В нашем случае они равны

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (10.29)$$

Расчет брусьев на прочность при изгибе с кручением производится с применением теорий прочности. При этом расчет брусьев из пластичных материалов выполняется обычно на основе третьей или четвертой теории прочности.

По третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

подставив в это неравенство выражения σ_1 и σ_3 , получим

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.30)$$

Подставив в формулу (6.30) $\sigma = \frac{M}{W_z}$ и $\tau = \frac{T_k}{2W_z}$, получим

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T_k}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Вводя значение

$$M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T_k^2}$$

в (10.30) окончательно получаем условие прочности

$$\frac{M_{\text{III}}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (10.31)$$

Величину $M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2}$ называют приведенным (или эквивалентным) моментом по третьей теории прочности.

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставляя значения главных напряжений (10.29), после некоторых преобразований получаем

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.32)$$

После подстановки значений σ и τ получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{T_k}{2W_z}\right)^2} \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{W_z} = \frac{M_{\text{IV}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (10.33)$$

где $M_{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}$ – приведенный момент по 4-й теории прочности.

Для опасного сечения вала C определим приведенный момент по 3-й теории прочности

$$M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{324,2^2 + 87,7^2} = 335,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для круглого поперечного сечения $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{III}}}{0,1d^3} \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{III}}}{0,1[\sigma]}}.$$

Величина $[\sigma]$ для валов, испытывающих знакопеременную нагрузку, устанавливается более низкой. Для стали 30 ее можно принять

$$[\sigma] = 80 \text{ МПа} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{335,9 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 80}} = 10 \sqrt[3]{41,99} = 34,6 \text{ мм} \approx 35 \text{ мм}.$$

При расчете на изгиб с кручением брусьев с некруглым поперечным сечением трудно сразу определить опасное сечение. Если для бруса (вала) с круглым поперечным сечением сразу можно определить приведенный момент по одной из теорий прочности, то для сечения произвольной формы сделать это нельзя, а поэтому могут быть несколько опасных сечений, которые необходимо проверить на прочность.

Рассмотрим проверку на прочность брусьев прямоугольного поперечного сечения, испытывающих изгиб с кручением.

Пусть в предполагаемом опасном сечении действуют положительные изгибающие моменты M_z и M_y и крутящий момент T_k (рис.10.10, a).

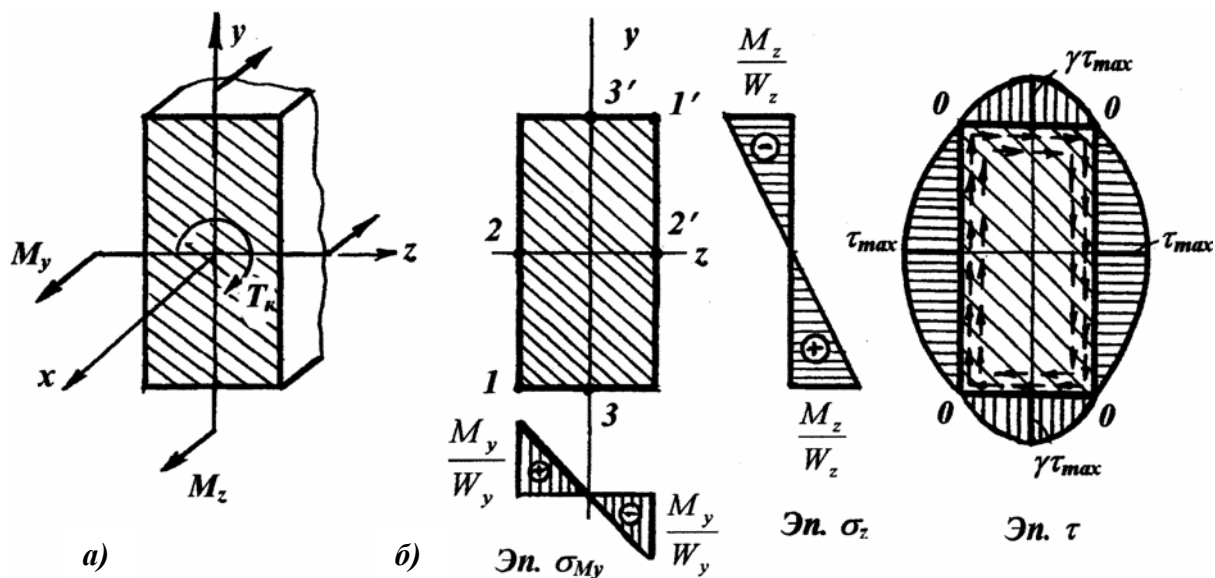


Рис. 10.10

Опасными точками в опасном сечении могут быть точки 1 (1'), 2 (2'), 3 (3'). Для пластичного материала точки 1, 2, 3 равноопасны точкам 1', 2', 3'.

Остановимся на рассмотрении опасных точек 1, 2, 3.

В точке 1 $\sigma_{(1)} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}$, а $\tau_{(1)} = 0$.

При расчете на прочность нет необходимости применять теории прочности, а $\sigma_{(1)} \leq [\sigma]$.

В точке 2 $\sigma_{(2)} = \frac{M_y}{W_y}$, а $\tau_{(2)} = \tau_{\max} = \frac{T_{\kappa}}{W_{\kappa}}$,

где W_{κ} – момент сопротивления кручению для прямоугольного сечения.

Применяя, например, III теорию прочности, определим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{(2)_{\text{экв}}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{(2)}^2 + 4\tau_{(2)}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{T_{\kappa}}{W_{\kappa}}\right)^2} \leq [\sigma].$$

В точке 3 $\sigma_{(3)} = \frac{M_z}{W_z}$, а $\tau_3 = \gamma\tau_{\max} = \gamma \frac{T_{\kappa}}{W_{\kappa}}$.

Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности в точке 3 должно быть меньше или равно допускаемому напряжению

$$\sigma_{(3)_{\text{экв}}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 4\tau_{(3)}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T_{\kappa}}{W_{\kappa}}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Элементы строительных конструкций, работающие на изгиб с кручением, могут рассчитываться и по предельным состояниям. Внутренние силовые факторы M_z , W_z , T_k определяются от расчетной нагрузки. Эквивалентные расчетные напряжения, определенные по одной из теорий прочности, должны быть меньше или равными расчетным сопротивлениям при изгибе.

Краткие выводы

Сложное нагружение бруса можно разложить на простейшие виды нагружений или их сочетаний и для определения внутренних усилий можно использовать метод сечений и принцип суперпозиции. Напряжения в характерных точках также определяются методом сложения.

Для таких видов сложного нагружения, как косоугольный изгиб, изгиб с растяжением, внецентренное растяжение или сжатие, где суммируются нормальные напряжения, для оценки прочности нет необходимости применять теории прочности, а достаточно лишь определить опасные точки и значения напряжений в них и сравнить их с величиной допускаемых напряжений или расчетных сопротивлений, как при простом растяжении.

В общем случае для отыскания опасных точек определяется опасное сечение и положение нейтральной оси. Точки, наиболее отдаленные от нейтральной оси и будут опасными.

Для таких видов сложного нагружения, как изгиб с кручением, кручение с растяжением, для оценки прочности необходимо использовать теории прочности.

В случае изгиба с кручением для вала с круглым поперечным сечением опасное сечение легко определяется по приведенному (расчетному) моменту соответствующей теории прочности. Так по третьей теории прочности приведенный момент

$$M_{III} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T_k^2}.$$

При изгибе с кручением брусьев с другой формой поперечного сечения сразу установить опасное сечение трудно, а поэтому первоначально их может предполагаться несколько. Последующее исследование с использованием теорий прочности выясняет истинно опасное сечение и опасные точки в этом сечении.